SPECIMEN THEORIAE NOVAE DE MENSVRA SORTIS.

AVCTORE
Daniele Bernoulli.

1.

Ex eo tempore, quo Geometrae conſiderare coeperunt menſuras ſortium, affirmarunt omnes, *valorem expectationis obtineri, cum valores ſinguli expectati multiplicentur per numerum caſuum quibus obtingere poſſunt, aggregatumque productorum diuidatur per ſummam omnium caſuum: caſus autem conſiderare iubent, qui ſint inter ſe aeque procliues*: Hacque poſita regula, quodcunque reliquum eſt in iſta doctrina huc redit, vt caſus omnes enumerentur, in aeque procliues reſoluantur atque in debitam claſſem diſponantur.

§. 2. Demonſtrationes huius propoſitionis, quarum quidem in lucem prodierunt multae, ſi recte examines, omnes videbis hac inniti hypotheſi, *quod cum nulla ſit ratio, cur expectanti plus tribui debeat vni quam alteri, vnicuique aequae ſint adiudicandae partes*; rationes autem nullas conſiderari, quae

perſonarum ſtatum reſpiciant, ſolasque illas perpendi, quae ad conditiones ſortis pertineant. Talem ſententiam ferant iudices ſupremi publica auctoritate conſtituti, at vero hoc loco non iudicia ſed conſilia danda ſunt; regulae nempe, quibus quisque ſuam ſibimet aeſtimare debeat ſortem pro diuerſa rerum ſuarum conſtitutione.

§. 3. Vt appareat, non male hoc ita moneri, pone caſu aliquo homini plane pauperi ſortem contigiſſe, qua pari probabilitate aut nihil aut viginti millia ducatorum obtinebit, an ſortem ſuam hic aeſtimabit decies millenis ducatis, et malene ſibi conſuluerit cum nouem millibus eam vendiderit? Id mihi non videtur, quamuis et credam hominem admodum opulentum ſibi deficere, cum illam ſi potuerit eodem pretio acquirere recuſet: ſi vero hac in re non fallor, perſpicuum eſt, non poſſe omnibus hominibus pro eodem modulo menſuram ſortis aſſignari nec proinde adhaerendum eſſe regulae §. 1. Sed et quiuis perſpiciet, qui haec attente conſiderare voluerit, ita definiri poſſe vocem *valoris*, qua in iſta regula vſi ſumus, vt tota deinceps ſine ſcrupulo omnibus ſit accipienda, nempe *valor* non eſt aeſtimandus ex pretio rei, ſed ex *emolumento*, quod vnusquisque inde capeſſit. Pretium ex re ipſa aeſtimatur omnibusque idem eſt, *emolumentum* ex conditione perſonae. Ita proculdubio pauperis magis refert lucrum facere mille ducatorum quam diuitis, etſi pretium vtrique idem ſit.

§. 4.

§. 4. Eo iam deducta est res, vt vnius vocis mutatione quiuis sibi consulere possit: quia autem noua est hypothesis, indigebit illa dilucidatione aliqua. Constitui itaque speciminis loco exponere, quae eam in rem meditatus sum; Regulae interim fundamentalis loco hac vtemur: *Cum emolumenta singula expectata multiplicantur per numerum casuum, quibus obtinebuntur aggregatumque productorum diuiditur per numerum omnium casuum, obtinebitur* emolumentum *medium, et lucrum huic* emolumento *respondens aequiualebit sorti quaesitae.*

§. 5. Verum sic liquet, nullam posse mensuram sortis obtineri, nisi simul innotescat *emolumentum*, quod ex lucro quouis vnicuique venit, et vice versa quantum lucrum requiratur vt certum inde eueniat emolumentum, qua de re vix est vt aliquid certi dici possit, quandoquidem a variis circumstantiis mutari potest. Ita quamuis plerumque a lucro simili magis alleuetur pauper quam opulentus, posset tamen ex gr. hominis captiui bis mille ducatos diuitis, cui altero tanto opus sit pro libertate redimenda plus referre lucrum bis mille ducatorum, quam alterius non ita diuitis; huiuscemodi autem exempla quamuis fingi possent sine fine, oppido tamen rara sunt. Considerabimus igitur potissimum, quid plerumque contingat atque vt rectius rem intelligamus, bona hominis censebimus sensim sensimque incrementis infinite paruis continuo augeri. Ita vero valde probabile

est *lucrulum quoduis semper emolumentum afferre summae bonorum reciproce proportionale.* Dum hanc hypothesin illustrem, dicam quid *bonorum summa* mihi significet, nempe omnia ea, quae victum, amictum fortunam commodam, imo et luxum omniumque desideriorum expletionem subministrare et largiri valent, ita vt nemo nihil habere dici possit nisi quem fames extingit, sitque plurimis bonorum potissima pars industria, quae vel ipsam mendicitatem in se continet: qui mendicando decem annuatim aureos sibi comparat, is non facile accipiat summam quinquaginta aureorum cum conditione vt nihil vnquam sibi mendicet aut alio modo acquirere tentet, iisque expensis salutem omnem habeat resciffam; quinimo de iis etiam, qui nihil habentes aere premuntur alieno, dubito, an se eo liberari simulque summam longe maiorem dono accipere velint cum tali conditione. Iam vero si mendicus pactum inire nolit nisi summam paratam obtineat minimum centum aureorum, nec ille qui aere alieno laborat nisi mille aureos accipiat, priorem centum, alterum mille aureis diuitem dicemus quamuis communi loquendi modo ille nihil, hic vero minus quam nihil habeat.

§. 6. His ita definitis redeo ad id quod in superiori paragrapho indicaui, nempe nisi quid insoliti interueniat *aestimari posse emolumentum lucri valde parui summae bonorum reciproce proportionale.* Equidem cum recte considero, qua natura homines

com-

comparati esse soleant, video hanc positionem plerisque applicari posse. Pauci sunt, qui non annuos suos reditus dispendant omnes: iam vero, si vnius bona valeant centum mille ducatos, alterius totidem semiducatos; si ille annuos inde reditus obtineat quinquies mille ducatorum, hicque rursus totidem semiducatorum; perspicuum est omni respectu priori ducatum esse quod alteri semiducatum, atque adeo lucrum vnius ducati priori non plus valere, quam lucrum semiducati alterum iuuat. Si igitur vterque lucrum faciat vnius ducati, alter duplum inde emolumentum accipiet duos nempe lucratus semiducatos, quod exemplum quoniam instar omnium est, alia afferre superfluum puto. Eo verior est haec propositio, quod maxima hominum pars bona alia praeter industriam vix habet, et ex hac sola perpetuo viuit. Sunt tamen quibus vnus ducatus magis cordi est, quam sunt plures ducati homini minus diuiti magis autem generoso. Quia vero nos deinceps considerabimus vnum eundemque hominem nihil id ad nos attinebit. Qui minus lucro delectatur, is quoque patientius fert damnum. Verum tamen quia aliquando particulares esse possunt causae quibus res secus se habet, pertractabo argumentum generalissime, quam ad specialem nostram descendam hypothesin, vt sic omnibus satisfiat.

§. 7. Denotet igitur AB summam bonorum ante sortem decisam; dein producta AB construatur Tabula VII. Fig. 5.

 tur

tur ſuper BL curua BGS cuius applicatae CG, DH, EL, FM etc. ceu *emolumenta* reſpondeant abſciſſis BC, BD, BE, BF etc. vt lucris. Sint porro m, n, p, q etc. numeri denotantes quot vicis obtineantur lucra BC, BD, BE, CF, etc. erit (per §. 4.) *emolumentum* medium $PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM + \text{etc.}}{m + n + p + q + \text{etc.}}$ Si vero nunc in linea AQ ad lineam AR perpendiculari ſumatur AN = PO, erit recta NO − AB, id eſt, BP lucrum legitime expectandum ſeu ſors quaeſita. Iam ſi porro ſcire velimus, quantum debeat eſſe depoſitum pro ſorte iſta obtinenda, continuanda eſt curua in partem contrariam, ita vt nunc abſciſſa B*p* denotet vbique iacturam, applicata vero *po* damnum iacturae. Quoniam autem in ludo iuſtae conditionis damnum iacturae debet eſſe aequale emolumento lucri, erit ſumenda A*n* = AN, vel *po* = PO, atque ſic denotabit B*p* depoſitum, vltra quod nemo ire debet, qui rebus ſuis bene conſulere cupit.

Corollarium I.

§. 8. In hypotheſi hactenus ab auctoribus adhiberi ſolita, qua ponitur lucrum quoduis ex ſe ſolo eſſe aeſtimandum, ſemperque *emolumentum* afferre ſibi ſimpliciter proportionale, fit linea BS recta: vnde ſequitur ſi fuerit $PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM + \text{etc.}}{m + n + p + q + \text{etc.}}$ fore etiam ſumtis ab vtraque parte proportionalibus $BP = \frac{m.BC + n.BD + p.BE + q.BF + \text{etc.}}{m + n + p + q + \text{etc.}}$, quod conforme eſt cum regula communiter adhibita.

Co-

Corollarium 2.

§. 9. Si AB fuerit infinita ratione lucri vel maximi BF, quod speratur, erit arcus BM instar lineolae rectae infinitae paruae considerandus, hocque in casu rursus locum habet eadem ista regula vulgaris, quae adeoque valet proxime in omnibus ludis qui haud magni sunt momenti.

§. 10. Postquam sic argumentum pertractauimus generalissime, pergemus ad hypothesin illam particularem supra memoratam, quae sane prae omnibus aliis considerari meretur. Ante omnia quaerenda est natura curuae sBS manentibus positionibus paragraphi septimi: quia vero vi hypothesis lucrula infinite parua sunt consideranda, censebimus lucra BC et BD tantum non aequalia, ita differentia CD sit infinite parua; ductaque Gr ipsi BR parallela erit rH *emolumentum* infinite paruum hominis cuius bona sunt AC et qui facit lucrum minimum CD. Istud vero *emolumentum* non solum ex lucrulo CD, cui vtique caeteris paribus est proportionale, sed et ex summa bonorum AC, cuius rationem sequitur inuersam, est aestimandum. Igitur si ponatur $AC = x$, $CD = dx$, $CG = y$, $rH = dy$; $AB = \alpha$, denoterque b constantem quantitatem quamcunque, erit $dy = \frac{b\,dx}{x}$, vel $y = b \log. \frac{x}{\alpha}$. Est itaque curua sBS logarithmica cuius subtangens vbique $= b$ et cuius asymtotos est Qq.

§. 11. Si nunc comparentur haec cum iis, quae paragrapho ſeptimo dicta ſunt, apparebit eſſe $PO = b \log. \frac{AP}{AB}$, $CG = b \log. \frac{AC}{AB}$, $DH = b \log. \frac{AD}{AB}$; et ſic porro; ergo cum fuerit $PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EL + q.FM}{m + n + p + q}$ + etc., erit nunc $b \log. \frac{AP}{AB} = (mb \log. \frac{AC}{AB} + nb \log. \frac{AD}{AB} + pb \log. \frac{AE}{AB} + qb \log. \frac{AF}{AB} + \text{etc.}) : (m + n + p + q + \text{etc.})$; vnde deducitur $AP = (AC^m . AD^n . AE^p . AF^q . \text{etc.})^{1:(m+n+p+q+\text{etc.})}$, et cum ab hac ſubtrahitur AB remanebit BP ſortem denotans quaeſitam.

§. 12. Subminiſtrat praecedens paragraphus hanc regulam: *lucrum quoduis ſumma bonorum auctum eleuetur ad dignitatem indicatam per reſpondentem numerum caſuum; dein omnes hae dignitates inter ſe multiplicentur et ex curuarum producto extrahatur radix ordinis indicati per numerum omnium caſuum: tum denique a radice ſubtrahatur ſumma omnium bonorum: quod reſiduum eſt, indicabit ſortem quaeſitam.* Atque haec propoſitio eſt principalis pro dimetienda ſorte in variis caſibus, cui nunc vt factum eſt hactenus in hypotheſi communi, theoriam integram, quod opus tum vtilitate tum nouitate ſua ſe commendare poſſet, ſuperſtruerem, ſi id alii incepti labores permitterent. Nunc quidem inter ea, quae ſe mihi prima obtulerunt fronte, notabiliora quaedam tantum allegabo.

§. 13. Et primo quidem apparet, quum conditiones ludi finguntur vel aequiſſimae, vtrumque col-

colluſorum tamen praeiudicium exinde accipere; egregium profecto naturae documentum vitandae aleae.. Sequitur id autem ex concauitate curuae *sBS* verſus *BR*, qua fit, vt facto depoſito *Bp* aequali lucro ſperato *BP*, ſit *detrimentum po*, quod ex ſiniſtro euentu oritur ſemper maius emolumento *PO* quod ſperatur. Quamuis autem id ſatis per ſe pateat Geometris, attamen vt intelligatur ab omnibus exemplo illuſtrabo. Sint duo colluſores, quorum quiuis in bonis centum habeat ducatos, horumque partem dimidiam ſorti in vtramque partem aeque procliui committat. His ita poſitis habebit quiuis quinquaginta ducatos vna cum ſpe centum ducatorum: vtriusque autem ſumma per regulam paragr. 12. valet tantum $(50.^1 150.^1)^{\frac{1}{2}}$ ſeu $\sqrt{(50.150.)}$ id eſt, minus quam octoginta ſeptem ducatos, ita vt vterque a ludo quamuis aequiſſimae conditionis detrimentum capiat plus quam tredecim ducatorum: at vero vt ſimul appareat veritas illa, quam quiuis naturalis luminis inſtinctu agnoſcit, eo maiorem nempe eſſe aleatoris imprudentiam quo partem bonorum ſuorum notabiliorem fortunae exponat, conſiderabimus idem exemplum hoc ſolo interpoſito diſcrimine, alterum colluſorem ante depoſitos quinquaginta ducatos habuiſſe ducentos: is tunc damnum accipit, quod exprimitur per $200 - \sqrt{150.250}$, nempe parum vltra ſex ducatos.

§. 14. Cum itaque inconsiderate agit, quicunque paribus conditionibus vel minimam bonorum suorum partem alearum fortunae credit, conueniet hic inquirere quamnam in deponendis nummis quiuis praerogatiuam habere debeat prae collusore, vt sine praeiudicio ludum inire possit. Ludum vero fingemus simplicissimum rursus, duobus nempe definitum casibus, aeque procliuibus altero secundo altero contrario; sit lucrum euentu prospero impetrandum $= a$, depositum euentu sinistro perdendum $= x$; summa bonorum $= \alpha$; sic igitur erit $AB = \alpha$; $BP = a$; $PO = $ (§. 10) $b \log. \frac{\alpha + a}{\alpha}$ et quum (per §. 7.) sit $po = PO$, erit per naturam logarithmicae $Bp = \frac{\alpha\alpha}{\alpha + a}$; denotat autem Bp depositum x; est igitur $x = \frac{\alpha a}{\alpha + a}$, quae quantitas semper minor est quam lucrum speratum a; exinde etiam deducitur, stulte hunc agere qui omnia sua bona periclitatur spe lucri quantumuis magni, quod nemo difficulter sibi persuadebit, si recte perpenderit definitiones nostras praemissas. Hinc etiam est, quod in vita ciuili vnanimiter videtur receptum, hominem nempe cum ratione rem dubiam tentare posse, quam alius non possit.

§. 15. Hic praesertim consideratu digna sunt quae mercatoribus solennia sunt in vadandis mercibus, quae mari vehuntur; id vero sequenti explicabo exemplo. Caius Petropoli degens merces coëmit Amstelodami, quas si praesentes habeat

Petro-

Petropoli, vendere poteſt pro decem millibus Rubelonibus. Curat igitur vt mari aduehantur, dubitat autem an vade vti debeat nec ne? Interim non ignorat inter centum naues eo anni tempore Amſtelodamo Petropolin proficiſcentes quinque perire tantum ſolere; nec tamen vadem reperire poteſt infra pretium octingentorum Rubelonum, quod enorme putat. Quaeritur igitur quanta Caii bona eſſe debeant praeter praedictas merces, vt cum ratione ſponſionem negligere poſſit: ſint illa $= x$; erunt eius bona vna cum ſpe mercium felicis appulſus $= \sqrt[100]{(x+10000)^{95}x^{5}} = \sqrt[20]{(x+10000)^{19}x}$, ſi ſponſione non fuerit vſus; ſi vero vſus fuerit, habebit ſummam certam $x + 9200$. Aequatis autem hiſce quantitatibus fit $(x+10000)^{19}x = (x+9200)^{20}$ ſeu proxime $x = 5043$. Si proin Caius plus habuerit praeter mercium ſuarum expectationem quam quinquies mille quadraginta tres Rubelones, bene faciet recuſendo ſponſionem, ſin minus accipiendo. At ſi quaeratur quanta bona ille qui pro octingentis Rubelonibus ſe ſponſorem exhibuit minimum poſſidere debeat, vt cum ratione ſponſionem in ſe ſuſcipere poſſit, ponimus eius bona $= y$; et erit $\sqrt[20]{(y+800)^{19}.(y-9200)} = y$, ſeu proxime $y = 14243$, qui numerus ſine nouo calculo ex praecedente colligi etiam potuiſſet. Qui minus diues eſt inepte ſe vadem offert, quod tamen opulentior non ſine ratione facit. Hinc intelligitur quam commode huiusmodi ſponſiones introductae

 fue-

fuerint, cum parti vtrique magno inseruire possint emolumento. Pariter si sexcentis Rubelonibus Caius vadem habere possit, imprudenter recusaret eum, si minus habeat quam 20478. R. nimisque timide agit, si plus quam 20478. diues merces vadatur. Ita quoque inconsiderate ageret qui minus quam 29878. R. habens se Caio sponsorem offerret pro sexcentis Rubelonibus; bene autem sibi consulet, si id faciat quum plus habet. Nemo interim, quantumuis diues rebus suis bene prospiceret, si quingentis Rubelonibus sponsionem in se susciperet.

Tabula VI. Fig. 2. *§. 16.* *Praeterea ex hac nostra theoria alia sequitur regula hominibus non inutilis futura; scilicet consultius esse bona illa, quae periculo sunt obnoxia, in plures distribuere partes quam omnia simul periclitari; hanc rursus explicabo.* Sempronius bona habet praesentia in vniuersum 4000. duc. et in terris exoticis insuper merces possidet pro 8000. duc. quae non aliter quam mari aduehi possunt. Constat autem ex diuturno rerum vsu ex decem nauibus vnam perire. His ita stantibus dico Sempronii, si omnes 8000. duc. vni naui credat, expectationem a mercibus valere 6751. duc. qui nempe numerus est $\sqrt[10]{12000.^{9}\ 4000.^{1}} - 4000.$ Si vero partibus aequalibus duabus nauibus merces committat, expectatio sibi valebit $\sqrt[100]{12000.^{81}\ 8000.^{18}\ 4000^{1}} - 4000$, id est, 7033. duc. Atque sic augebitur Sempronii expectatio, quamdiu partem vni

naui

naui committendam diminuit, nec tamen vnquam excedet ista expectatio valorem 7200. duc. Idem hoc monitum inseruiet iis etiam, qui bona sua litteris cambialibus credunt, aut aliis fortunae casibus exponunt.

§. 17. Plurima certe sunt alia noua plane eaque haud inutilia, quae nunc praeterire cogor. Maximam quidem eorum partem quiuis cordatus tacito naturae instinctu aliqualiter videt et sequitur, nemo autem fortasse crediderit posse ea tam praecise definiri, vt in his exemplis factum est. Cum igitur ita sit, vt omnia haec theoremata tam egregie consentiant cum iis, quae natura edocti sumus, iniquum esset ceu nudas veritates hypothesibus precariis innixas, ea negligere. Confirmabitur id etiam sequenti exemplo, quod hisce meditationibus occasionem dedit, et cuius historia haec est. Proposuit aliquando Cel. *Nicolaus Bernoulli*, in Academia Basiliensi Iuris vtriusque Professor, Honoratissimus meus Patruelis, Cl. *Montmortio* quinque problemata, quae videre est *dans l'analyse sur les jeux de hazard de Mr. de Montmort p.* 402. Horum problematum vltimum huc redit, *Petrus in altum proiicit nummum, idque donec in terram delapsus notatam semel ostenderit frontem: si vero id primo contingat iactu, tenetur Paulo dare ducatum vnum; si secundo duos; si tertio quatuor; si quarto octo, et sic porro duplicando quouis iactu ducatorum numerum. Quaeritur sors Pauli?*

Huius problematis mentionem fecit praefatus meus Patruelis in epistola, quam ad me dedit, cupiens de eo sententiam meam scire. Quandoquidem calculus dictet, sortem Pauli infinitam esse, nec tamen vllus sanae mentis, vt dicit, futurus sit, qui non libentissime spem suam vendiderit pro summa vigintiducatorum. Reuera quoties principiis communibus rem aggredimur, inuenimus sortem Pauli infinitam, quamuis nemo eam pretio vel admodum mediocri sibi sit comparaturus. Quum vero nostris principiis calculum absoluimus, intelligimus demum huius nodi solutionem. Solutio problematis ad principia nostra accommodata haec est.

§. 18. Infiniti sunt casus hic considerandi: horum autem pars dimidia facit vt ludus primo finiatur iactu; pars quarta vt finiatur iactu secundo; octaua vt tertio, decima sexta vt quarto et sic deinceps. Si proin numerus casuum omnium quamuis infinitus indicetur per N; patet esse casus numero $\frac{1}{2}$N, quibus Paulus lucratur vnum ducatum; $\frac{1}{4}$N quibus duos; $\frac{1}{8}$N quibus quatuor; $\frac{1}{16}$N quibus octo, et sic sine fine. Fuerint nunc Pauli bona vniuersa $= \alpha$, et erit sors ipsius quaesita $= \sqrt[N]{(\alpha+1)^{\frac{N}{2}} \cdot (\alpha+2)^{\frac{N}{4}} \cdot (\alpha+4)^{\frac{N}{8}} \cdot (\alpha+8)^{\frac{N}{16}} \cdot \text{etc.}} - \alpha$, siue $= \sqrt{(\alpha+1)} \cdot \sqrt[4]{(\alpha+2)} \cdot \sqrt[8]{(\alpha+4)} \cdot \sqrt[16]{(\alpha+8)}$ etc. $-\alpha$.

§. 19. Ex hac formula sortem Pauli indicante, sequitur hanc crescere crescentibus bonis, et nun-

quam fieri infinitam, nisi cum simul bona sunt infinita. Corollaria specialia haec sunt. Si nihil habuerit Paulus, sors eius erit $= \sqrt[2]{1} . \sqrt[4]{2} . \sqrt[8]{4} . \sqrt[16]{8}$. etc. quae praecise sic ipsi valet duos ducatos. Si decem habuerit ducatos, proxime tres valebit expectatio, et quatuor cum triente praeter propter si centum habuerit, ac denique sex cum mille habuerit. Facile hinc iudicatu est quam immensas quis diuitias possidere debeat, vt cum ratione viginti ducatis sortem Pauli emere possit. Pretium autem quo emi debet, quamuis differat a sorte quae iam possidetur, quia tamen admodum exigua est differentia, quando α est numerus magnus, vnum alteri aequale statui potest: acccurate autem posito emtionis pretio $= x$, determinatur, eius valor hac aequatione $\sqrt[2]{(\alpha + 1 - x)} . \sqrt[4]{(\alpha + 2 - x)} . \sqrt[8]{(\alpha + 4 - x)} . \sqrt[16]{(\alpha + 8 - x)}$ etc. $= \alpha$, cui proxime satisfacit cum α est numerus magnus haec aequatio $x = \sqrt[2]{(\alpha + 1)} . \sqrt[4]{(\alpha + 2)} . \sqrt[8]{(\alpha + 4)} . \sqrt[16]{(\alpha + 8)}$. etc. $- \alpha$.

Praelecta hac dissertatione coram Societate misi eius apographum supra memorato D:no Nicolao Bernoulli vt intelligerem quid de mea propositae suae difficultatis solutione sentiret. Is vero in epistola, quam A. 1732. ad me scripsit, testatus est nequaquam sibi displicere meam de mensura sortium sententiam, si modo quiuis suae sortis aestimator sit, aliter vero se

rem habere, si tertius instar iudicis secundum aequitatem et iustitiam vnicuique collusorum sortem assignare debeat. Id ipse pariter in §. 2. exposui. Communicauit deinde Vir Clar. mecum sententiam, quam de eadem difficultate tulit Cel. Cramerus aliquot ante annis, quam dissertationem meam conscripsissem et quam vsque adeo meae conformem inueni, vt mirum sit in tali argumento tam accurate nos consentire potuisse. Igitur operae pretium erit verba apponere, quibus Cl. Cramerus ipse sententiam suam aperuit in litteris A. 1728. ad Patruelem meum datis: ita autem ille:

"Je ne sai si je ne me trompe, mais je crois "tenir la resolution du cas singulier, que Vous "avez proposé à Mr. *de Montmort* dans Votre lettre "du 9. 7bre 1713. Probl. 5. pag. 402. Pour rendre "le cas plus simple je supposerai que A jette "en l'air une piece de monnoye, B s' engage "de lui donner 1 ecu si le coté de la croix tombe "le premier coup, 2 si ce n' est que le second, "4 si c'est le troisime coup, 8 si c'est le quatrieme "coup &c. Le paradoxe consiste en ce que le cal-"cul donne pour l'equivalent que A doit donner à B "une somme infinie, ce qui paroit absurde, puisquil "n'y a personne de bon sens, qui voulut donner 20. "ecus. On demande la raison de cette difference "entre le calcul mathematique et l' estime vulgaire. "Je crois qu'elle vient de ce que (*dans la theorie*) "les mathematiciens estimant l'argent á proportion "de sa quantité & (*dans la practique*) les hommes de "bon

bon sens à proportion de l' usage qu'ils en peuvent" faire. Ce qui rend l' esperance mathematique in-" finie c'est la somme prodigieuse que je peux rece-" voir, si le coté de la croix ne tombe que bien tard," le centieme ou le millieme coup. Or cette somme" si je raisonne en homme sensé, n'est pas plus pour" moi, ne me fait pas plus de plaisir, ne m' engage" pas plus à accepter le parti, que si elle n' etoit" que 10 ou 20 millions d' ecus. Supposans donc" que toute somme au dessus de 10 millions ou" (pour plus de facilité) au dessus de $2^{24} = 16777216$" d' ecus lui est egale, ou plutot que je ne puisse ja-" mais recevoir plus de 2^{24} ecus, quelque tard que" vienne le coté de la croix, et mon esperance sera" $\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \text{------} + \frac{1}{2^{25}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{26}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{27}} \times 2^{24} +$ &c. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \text{---}$ jusqu' à 24" termes, $+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ &c. $= 12 + 1 = 13$. " Ainsi moralement parlant mon esperance est redui-" te à 13 ecus et mon equivalent à autant, ce qui" paroit bien plus raisonnable que de le faire infini."

Vaga est hactenus ista solutionis explicatio et contradictioni obnoxia; si enim verum sit, non maiorem nobis videri summam 2^{25} *quam* 2^{24}, *nulla omnino attentio facienda erit ad summam, quam acquirere possim post vigesimum quartum iactum, quippe ante vigesimum quintum iactum faciendum iam possideam* $2^{24} - 1$, *quod non differt in hac theoria ab* 2^{24}. *Eodem igitur iure spem meam* 12 *scudos valere dici potest quam* 13. *Id vero nequaquam dico ad impugnandum Auctoris prin-*

principium, quod meum quoque est, que les hommes de bon sens doivent estimer l'argent à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire, *seu potius ne quis inde occasionem capiat male sentiendi de ipsa theoria. Verum id ipsum etiam expressis indicat verbis Cl. Cramerus in sequentibus, quae plane ad mentem nostram sunt. Sic igitur pergit*:

"On le (l'equivalent) pour ra encor trover "plus petit en faisant quelque autre supposition de "la valeur morale de richesses; car celle que je viens "de faire n'est pas exactement juste, puisqu'il sera "vrai que 100. millions font plus de plaisir que 10 "millions quoiqu'ils n'en fassent pas 10. fois plus. "Par exemple si l'on vouloit supposer que la valeur "morale des biens fut comme la racine quarrée "de leurs quantités mathematiques, c'est à dire, "que le plaisir que me fait 40000000. fut double "du plaisir que me fait 10000000., àlors mon "esperance morale feroit

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{1}+\tfrac{1}{4}\sqrt{2}+\tfrac{1}{8}\sqrt{4}+\tfrac{1}{16}\sqrt{8}+\text{etc.}=\frac{1}{2-\sqrt{2}},$$

"Mais cette quantité n'est pas l'equivalent, car "l'equivalent doit etre non pas egal a mon espe- "rance, mais tel que le chagrin de sa perte soit "egal à l'esperance morale du plaisir que j'espere "de recevoir en gagnant. Donc l'equivalent doit "etre (par supposition) $\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{6-4\sqrt{2}}=2,$ "9 &c., moins que 3 ce qui est bien mediocre "& que je crois pourtant aprocher plus de l'esti- "me vulgaire que 13. &c.

CLASSIS